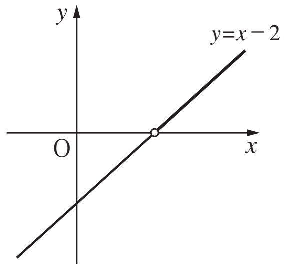
第8講　２次不等式

§1　２次不等式と２次関数のグラフ

要点整理 と 公式

要点1　不等式と関数

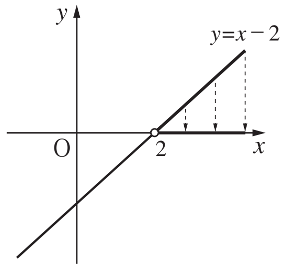


不等式　$x-2>0$　の解をグラフで考える。

左辺 $x-2$ を　$y=x-2$　とおくと，$y>0$　となる。

つまり，１次関数　$y=x-2$　のグラフにおいて，

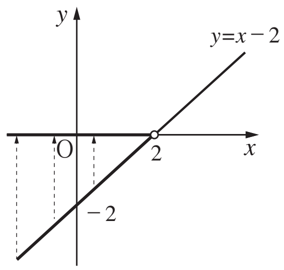
x軸より「　　　」にある部分のx座標の範囲である。



ここで，１次関数　$y=x-2$　のグラフとx軸との交点のx座標は，

$y=$＿＿＿，つまり1次方程式　$x-2$＿＿＿の解で，$x=$＿＿＿である。

よって，右図より　$x-2>0$　の解はx＿＿＿である。



同様に，$x-2<0$　の解は，

$y=x-2$　のグラフにおいて，x 軸より「　　　」にある部分の

x の範囲であり，グラフよりx＿＿＿である。

よって，以下のことがいえる。

> 不等式　$f(x)$＿＿＿0 の解は，関数 $y=f(x)$ のグラフで y＿＿＿0となるx座標の範囲
>
> 不等式　$f(x)$＿＿＿0 の解は，関数 $y=f(x)$ のグラフで y＿＿＿0となるx座標の範囲

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点❷ ２次不等式（グラフがx軸と2点で交わるとき）

$x^2-3x+2>0$　のように，不等式の右辺が０になるように整理したとき，

左辺がxの２次式になる不等式を，xの「2次不等式」という。

２次不等式の左辺を２次関数として考え，そのグラフを用いて２次不等式を解く。

グラフがx軸と異なる２点で交わるときの２次不等式の解は以下となる。

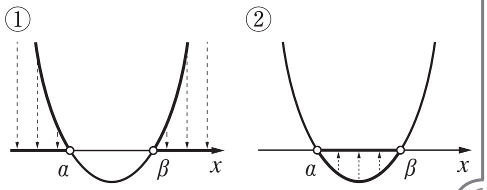
■ 2次不等式の解(1)

2次関数　$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$のグラフがx軸と異なる２点で交わるとき，

そのx座標を $x=\alpha$，β（$\alpha<\beta$）とすると

① $ax^2+bx+c>0$　の解は＿＿＿＿＿＿

② $ax^2+bx+c<0$　の解は＿＿＿＿＿



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

次の2次不等式を解け。

(1)　$(x+2)(x-1)>0$　　(2)　$x(x-3)<0$

(3)　$x^2-2x-8\geqq 0$　　(4)　$2x^2-5x-3\leqq 0$

(5)　$x^2+5x-2>0$　　(6)　$-x^2+4x-1>0$

Point Pickup

2次不等式　$f(x)>0$, $f(x)<0$

⟹　2次関数　$y=f(x)$　の「　　　　」をかいて考える。

2次不等式　$f(x)>0$, $f(x)<0$　の解法(1)

$f(x)=ax^2+bx+c$ (x^2の係数aが「　　　」のとき)について

①　2次方程式　$f(x)$＿＿＿の解を考える。それが「x軸との共有点」のx座標。

　$f(x)$ が $(x-\alpha)(x-\beta)$ のように「　　　　」できれば,

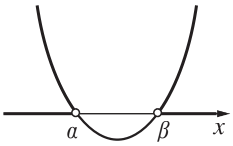
　そのx座標は　$x=\alpha$, β　であり，グラフはx軸と2つの共有点をもつ。

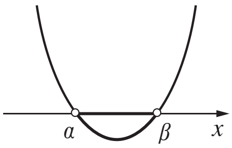
　因数分解できないときは,「　　　　」で求める。

②　①の解が　$x=\alpha$, β $(\alpha<\beta)$　のとき

　$f(x)>0$　の解は＿＿＿＿＿＿

　$f(x)<0$　の解は＿＿＿＿＿＿





※「≧」は「>　　　　=」　「≦」は「<　　　　=」である。

※＿＿＿＿のときは，不等式の両辺に「−1」をかける。

　不等号の向きが「　　　　」ことに注意。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ ２次不等式（グラフが接するとき）

要点整理 と 公式

要点❸ ２次不等式（グラフが x 軸と接するとき）

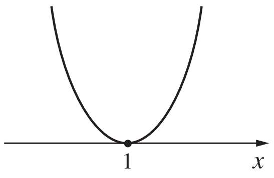
２次不等式　$x^2-2x+1>0$　を解く。

この式の左辺は，$x^2-2x+1=(x-1)^2$　と変形できる。

２次関数　$y=(x-1)^2$　のグラフと x 軸の共有点の x 座標は

「　　　　　　　　」である。

つまりこのグラフは点$(1,\ 0)$で x 軸と「　　　　　　」。

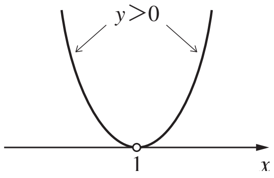


このグラフで，y ______ となる部分の x 座標を考えると，

右図より ____________ である。

よって，２次不等式　$x^2-2x+1>0$　の解は

「　　　　　　　　　　　　　　」である。



ここで，２次不等式　$x^2-2x+1\geqq 0$　の解は，

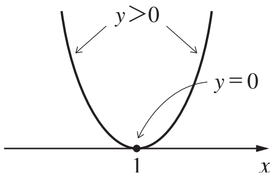
「$x^2-2x+1>0$　　　　　　$x^2-2x+1=0$」

を満たす実数 x の範囲である。

　$x^2-2x+1>0$　の解は１以外のすべての実数

　$x^2-2x+1=0$　の解は　$(x-1)^2=0$　より ______

よって，2次不等式　$x^2-2x+1\geqq 0$　の解は「　　　　　　　　　　」である。

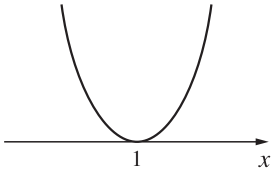


２次不等式　$x^2-2x+1<0$　の解は，

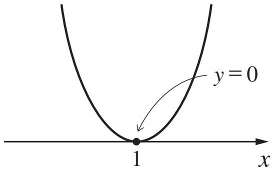
２次関数　$y=(x-1)^2$　のグラフの y ______ となる部分の

x 座標である。しかし，そのような x は ____________ 。

よって，2次不等式　$x^2-2x+1<0$　の解は「　　　　」。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。



2 次不等式　$x^2-2x+1\leqq 0$　の解は，

「$x^2-2x+1<0$　　　　　　$x^2-2x+1=0$」

を満たす実数 x の範囲である。

　$x^2-2x+1<0$　の解は　ない

　$x^2-2x+1=0$　の解は　$x=1$　である。

よって，2次不等式　$x^2-2x+1\leqq 0$　の解は「　　　　　」である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

次の２次不等式を解け。

(1)　$x^2-4x+4>0$　　(2)　$9x^2+6x+1\geqq 0$

(3)　$x^2+10x+25<0$　　(4)　$4x^2-12x+9\leqq 0$

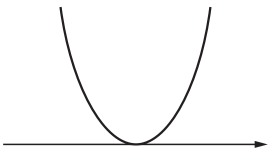
Point Pickup

２次不等式　$f(x)>0$，$f(x)<0$　の解法(2)

２次方程式 $f(x)=0$ が「　　　　」$x=\alpha$　をもつとき，

$y=f(x)$ のグラフは点$(\alpha,\ 0)$で x 軸に「　　　　　」。

このとき，$f(x)$ の x^2 の係数 a を $a>0$ とすると



$f(x)>0$　の解は＿＿＿＿＿＿＿＿

$f(x)\geqq 0$　の解は＿＿＿＿＿

$f(x)<0$　の解は＿＿＿

$f(x)\leqq 0$　の解は＿＿＿

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

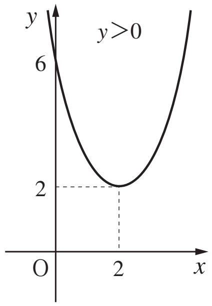
｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ ２次不等式(グラフが共有点をもたないとき)

要点整理 と 公式

要点４ ２次不等式(グラフが x 軸と共有点をもたないとき)



２次不等式　$x^2-4x+6>0$　を解く。

この式の左辺は，$x^2-4x+6=(x-2)^2+2$　と変形できる。

２次関数　$y=(x-2)^2+2$　のグラフとx軸との共有点は「　　　　」。

さらに，このグラフは x 軸より「　　　　　　　」，つまり

____________の範囲にある。

よって，$x^2-4x+6>0$　の解は「　　　　　　　」である。

ここで，２次不等式　$x^2-4x+6 \geqq 0$　の解は，

「$x^2-4x+6>0$　　　　　$x^2-4x+6=0$」

を満たす実数 x の範囲であるが，

$x^2-4x+6>0$　の解は すべての実数 である。

また，２次関数　$y=(x-2)^2+2$　のグラフと x 軸との共有点は「　　　　」ので，

２次方程式　$x^2-4x+6=0$　の解は「　　　　」。

よって，２次不等式　$x^2-4x+6 \geqq 0$　の解は「　　　　　　　」である。

2次不等式　$x^2-4x+6<0$　について，

2次関数　$y=(x-2)^2+2$　のグラフは　y ______ には「　　　　　　」。

よって，2次不等式　$x^2-4x+6<0$　の解は「　　　　」。

2次不等式　$x^2-4x+6 \leqq 0$　の解は，

「$x^2-4x+6<0$　　　　　$x^2-4x+6=0$」

を満たす実数 x の範囲であるが，

　$x^2-4x+6<0$の解は　ない

　$x^2-4x+6=0$の解は　ない

よって，2次不等式　$x^2-4x+6 \leqq 0$　の解は「　　　　」。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛メモ｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

次の２次不等式を解け。

(1)　$x^2-4x+5>0$　　(2)　$x^2+5x+7 \geqq 0$

(3)　$2x^2+4x+3<0$　　(4)　$-2x^2+3x-2 \geqq 0$

Point Pickup

２次不等式　$f(x)>0$，$f(x)<0$　の解法(3)

２次方程式　$f(x)=0$　が「　　　　　　　　　　」とき，

$y=f(x)$ のグラフは x 軸と「　　　　　　　　　　」。

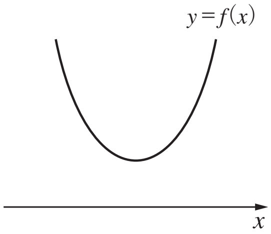
このとき，$f(x)$ の x^2の係数 a を $a>0$ とすると

$f(x)>0$　の解は ________

$f(x) \geqq 0$　の解は ________

$f(x)<0$　の解は ____

$f(x) \leqq 0$　の解は ____



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4　２次不等式の応用

要点整理 と 公式

要点５　２次不等式の応用（２次方程式の解の条件）

２次方程式　$x^2+mx+1=0$　が異なる２つの実数解をもつときの，定数 m の値の範囲を求める。

判別式をDとすると　D＿＿＿＿であればよい。

$D=m^2-4\cdot1\cdot1=m^2-4$　より

$m^2-4>0$　　これは「　　　の2次不等式」である。

変形して　$(m+2)(m-2)>0$

よって，$m<-2$，$2<m$

要点６　２次不等式の応用（２次関数と x 軸の共有点の個数）

２次関数　$y=x^2-kx+2k-3$　が常に x 軸より上にあるときの，定数 k の値の範囲を求める。

x^2の係数は正より，このグラフは「　　　に凸」である。

よって，グラフが常に x 軸より上にあるのは，

x軸との共有点が「　　　　」ときであり，それは

$D=(-k)^2-4\cdot1\cdot(2k-3)=k^2-8k+12$　とすると，

D＿＿＿＿のときである。

よって　$k^2-8k+12<0$　より　$(k-2)(k-6)<0$

したがって　$2<k<6$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

(1) 2 次方程式　$x^2+2kx+1=0$　が実数解をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) 2 次関数　$y=-x^2+2mx-m-6$　が常に x 軸より下にあるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

「実数解をもつ条件」＝「共有点をもつ条件」

2次方程式　$ax^2+bx+c=0$　が「異なる2つの実数解をもつ」条件と，

2次関数　$y=ax^2+bx+c$　が「x 軸と2つの交点をもつ」条件は，

$D=b^2-4ac$ とすると，ともに「D 　　　」である。

2次関数と x 軸の位置関係の決定

2次関数　$y=ax^2+bx+c$　と x 軸の位置関係について，$D=b^2-4ac$ とすると

つねに x 軸より上 $\iff$ a ＿＿（＿＿に凸） かつ D ＿＿（x 軸との共有点なし）

つねに x 軸より下 $\iff$ a ＿＿（＿＿に凸） かつ D ＿＿（x 軸との共有点なし）

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　確認テスト

1 次の2次不等式を解け。

(i)　$x^2-8x-20<0$　　［アイ］$<x<$［ウエ］

(ii)　$x^2-4x>0$　　$x<$［オ］，［カ］$<x$

2 2次不等式　$x^2+6x+9>0$　の解は［キ］。［キ］にあてはまるものを次の①～④から選べ。

①　すべての実数　　②　$x=-3$ 以外のすべての実数　　③　$x=-3$　　④　ない

3 2次不等式　$x^2+10x+27<0$　について，方程式　$x^2+10x+27=0$　の判別式を Dとすると，$D=$［クケ］である。よってこの２次不等式の解は［コ］。［コ］にあてはまるものを次の①～②から選べ。

①　すべての実数　　②　ない

4 2次方程式　$x^2-mx+2=0$　が異なる２つの実数解をもつとき，定数mの値の範囲は

$m<-$［サ］$\sqrt{［シ］}$，［サ］$\sqrt{［シ］}<m$　である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　２次不等式

1

(1)　$x<-2,\ 1<x$

(2)　$0<x<3$

(3)　$x^2-2x-8\geqq 0$　より　$(x-4)(x+2)\geqq 0$　よって　$x\leqq -2,\ 4\leqq x$

(4)　$2x^2-5x-3\leqq 0$　より　$(2x+1)(x-3)\leqq 0$　よって　$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 3$

(5)　$x^2+5x-2=0$　を解くと　$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$

よって，求める2次不等式の解は　$x<\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2},\ \dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}<x$

(6)　$-x^2+4x-1>0$　より　$x^2-4x+1<0$

$x^2-4x+1=0$　を解くと　$x=2\pm\sqrt{3}$

よって，求める2次不等式の解は　$2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$

2

(1)　$x^2-4x+4>0$　より　$(x-2)^2>0$　よって　2 以外のすべての実数

(2)　$9x^2+6x+1\geqq 0$　より　$(3x+1)^2\geqq 0$　よって　すべての実数

(3)　$x^2+10x+25<0$　より　$(x+5)^2<0$　よって　解はない

(4)　$4x^2-12x+9\leqq 0$　より　$(2x-3)^2\leqq 0$　よって　$x=\dfrac{3}{2}$

3

(1)　$x^2-4x+5=(x-2)^2+1$　よって　$x^2-4x+5>0$　の解は　すべての実数

(2)　$x^2+5x+7=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$　よって　$x^2+5x+7\geqq 0$　の解は　すべての実数

(3)　$2x^2+4x+3=2(x+1)^2+1$　よって　$2x^2+4x+3<0$　の解は　ない

(4)　$-2x^2+3x-2\geqq 0$　より　$2x^2-3x+2\leqq 0$

$2x^2-3x+2=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}$　よって　$2x^2-3x+2\leqq 0$　の解は　ない

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

(1) 判別式をDとすると　$D=(2k)^2-4\cdot1\cdot1=4k^2-4$

2 次方程式が実数解をもつための条件は　$D\geqq0$　である。

よって　$4k^2-4\geqq0$　　$k^2-1\geqq0$　　$(k+1)(k-1)\geqq0$

ゆえに　$k\leqq-1$，$1\leqq k$

(2) $D=(2m)^2-4\cdot(-1)\cdot(-m-6)=4m^2-4m-24$　とすると，

2 次関数　$y=-x^2+2mx-m-6$　が常にx軸より下にあるための条件は　$D<0$　である。

よって　$4m^2-4m-24<0$　　$m^2-m-6<0$　　$(m+2)(m-3)<0$

ゆえに　$-2<m<3$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　確認テスト

1　次の2次不等式を解け。

(i)　$x^2-8x-20<0$　　[アイ] $<x<$ [ウエ]

(ii)　$x^2-4x>0$　　$x<$ [オ]，[カ] $<x$

2　2次不等式　$x^2+6x+9>0$　の解は [キ]。[キ] にあてはまるものを次の①～④から選べ。

①　すべての実数　　②　$x=-3$ 以外のすべての実数　　③　$x=-3$　　④　ない

3　2次不等式　$x^2+10x+27<0$　について，方程式　$x^2+10x+27=0$　の判別式をDとすると，$D=$ [クケ] である。よってこの 2 次不等式の解は [コ]。[コ] にあてはまるものを次の①～②から選べ。

①　すべての実数　　②　ない

4　2次方程式　$x^2-mx+2=0$　が異なる 2 つの実数解をもつとき，定数mの値の範囲は

$m<-$ [サ] $\sqrt{\text{[シ]}}$，[サ] $\sqrt{\text{[シ]}}$ $<m$　である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

1 (i)　ア　－　　イ　2　　ウ　1　　エ　0

(ii)　オ　0　　カ　4

2 キ　②

3 ク　－　　ケ　8　　コ　②

4 サ　2　　シ　2

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。